Exercice 1

Pour participer à un marathon, Hélène commence son entraînement en parcourant 10 kilomètres la première semaine, puis augmente cette distance de 2 kilomètres chaque semaine. On note $d(n)$ la distance parcourue par Hélène la n-ième semaine d'entraînement.

1. Calculer $d(2)$ puis interpréter ce résultat.
2. Exprimer $d(n+1)$ en fonction de $d(n)$.
3. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par Hélène lors de sa 10ème semaine d'entraînement.

1. $d(2) = d(1) + 5 = 10 + 5 = 15$
   Hélène va courir 12 kilomètres la deuxième semaine.
2. Chaque semaine, Hélène court 5 kilomètres de plus que la semaine précédente donc $d(n+1) = d(n) + 5$.
3. $d(10) = d_1 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{9 \text{ fois}} = 10 + 9 \times 2 = 28$
   Hélène va courir 28 kilomètres lors de sa 10ème semaine d'entraînement.

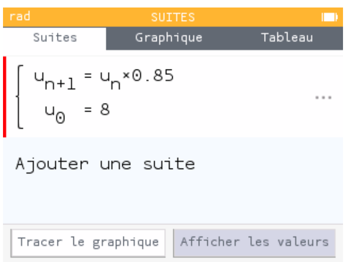
Exercice 2

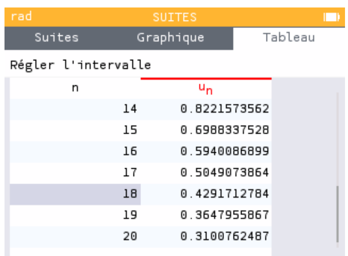
Une tablette tactile affiche une autonomie de 8 heures. Une étude montre que l'autonomie de la batterie baisse de 15% chaque année d'utilisation. On modélise le nombre d'heures d'autonomie de cette tablette après n années d'utilisation à l'aide d'une suite.

1. Calculer l'autonomie de la batterie après 1 an, puis après 2 ans d'utilisation.
2. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'autonomie de la batterie après 10 ans d'utilisation.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre d'années d'utilisation de la tablette tel que son autonomie ne soit plus que de 30 minutes.

1. Diminuer une valeur de 15%, c'est la multiplier par $1 - \frac{15}{100} = 0,85$.
   $8 \times 0,85 = 6,8$
   De plus, $0,8$h correspond à $0,8 \times 60$min $= 48$min.
   L'autonomie de la batterie après un an est de 6h 48min.
   $6,8 \times 0,85 = 5,78$
   De plus, $0,78$h correspond à $0,78 \times 60$min ≈ 47min.
   L'autonomie de la batterie après deux ans est de 5h 47min.
2. Chaque année, l'autonomie de la batterie est multipliée par $0,85$ donc $u(n+1) = u(n) \times 0,85$.
3. $u(10) = u(0) \times \underbrace{0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times \ldots \times 0,85}_{10 \text{ fois}} = 8 \times 0,85^{10} \approx 1,57$
   De plus, $0,57$h correspond à $0,57 \times 60$min ≈ 34min.
   L'autonomie de la batterie après 10 ans d'utilisation est d'environ 1h 34min.
4. Méthode 1 :
   On calcule tous les termes de la suite jusqu'à trouver le premier terme inférieur à $0,5$ (car $0,5$h$=$ 30min).
   $8 \times 0,85^{15} \approx 0,699 > 0,5$
   $8 \times 0,85^{16} \approx 0,594 > 0,5$
   $8 \times 0,85^{17} \approx 0,505 > 0,5$
   $8 \times 0,85^{18} \approx 0,429 < 0,5$ Ouf, enfin !

   Méthode 2 :
   On rentre la suite à la calculatrice et on cherche directement dans le tableau de valeurs le premier terme inférieur à $0,5$.





L'autonomie de la tablette deviendra inférieure à 30 minutes après 18 années d'utilisation.

Exercice 3

Le salaire annuel d'embauche d'un employé est de 21600€. Son contrat prévoit une hausse annuelle de $2,5\%$.
On note $u(0) = 21600$ et, pour tout entier naturel n, $u(n)$ est le salaire au bout de n années.

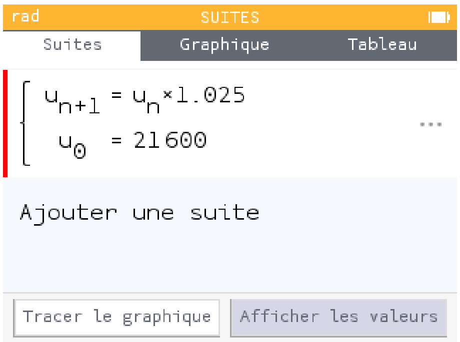
1. Calculer $u(1)$.
2. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.
3. Déterminer à l'aide de la calculatrice :
   (a) le salaire annuel de l'employé au bout de 18 ans.
   (b) quand son salaire aura doublé.

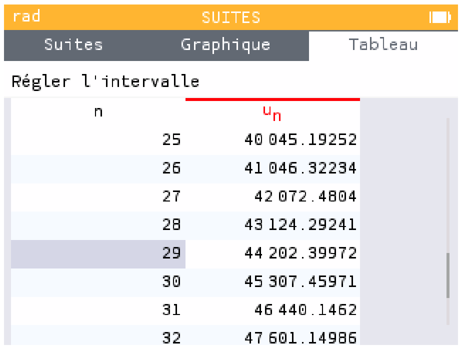
1. Augmenter une valeur de $2,5\%$, c'est la multiplier par $1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$.
   $u(1) = u(0) \times 1,025 = 21600 \times 1,025 = 22140$.
   Après une année dans l'entreprise, le salaire de l'employé sera de 22140€.
2. Chaque année, l'autonomie de la batterie est multipliée par $0,85$ donc $u(n+1) = u(n) \times 0,85$.
3. (a) $u(18) = u(0) \times \underbrace{1,025 \times 1,025 \times 1,025 \times \ldots \times 1,025}_{18 \text{ fois}} = 21600 \times 1,025^{18} \approx 33689$
   Après 18 années dans l'entreprise, le salaire de l'employé sera d'environ 33689€.

   (b) On cherche le nombre d'années nécessaires pour que son salaire dépasse $21600 \times 2 = 43200$€.

   Méthode 1 :
   On calcule tous les termes de la suite jusqu'à trouver le premier terme supérieur à 43200.
   $21600 \times 1,025^{26} \approx 41046 < 43200$
   $21600 \times 1,025^{27} \approx 42072 < 43200$
   $21600 \times 1,025^{28} \approx 43124 < 43200$
   $21600 \times 1,025^{29} \approx 44202 > 43200$ Ouf, enfin !

   Méthode 2 :
   On rentre la suite à la calculatrice et on cherche directement dans le tableau de valeurs le premier terme supérieur à 43200.





n	u_n
25	40 045.19252
26	41 046.32234
27	42 072.4804
28	43 124.29241
29	44 202.39972
30	45 307.45971
31	46 440.1462
32	47 601.14986

Le salaire de l'employé aura doublé après avoir passé 29 ans dans l'entreprise.

Exercice 4

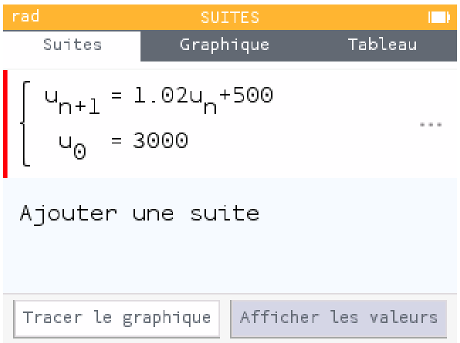
Le 1er janvier 2020, Louise ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 3000€. Le taux de rémunération de ce livret est fixé à 2% par an et les intérêts sont versés sur le livret le 1er janvier de chaque année. De plus, Louise souhaiter verser 500€ supplémentaires sur son livret chaque année.
Louise souhaite déterminer le montant dont elle disposera le 1er janvier 2030.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le montant exprimé en euros, disponible sur le livret le 1er janvier de l'année $2020+n$.
On a donc $u_0 = 3000$.

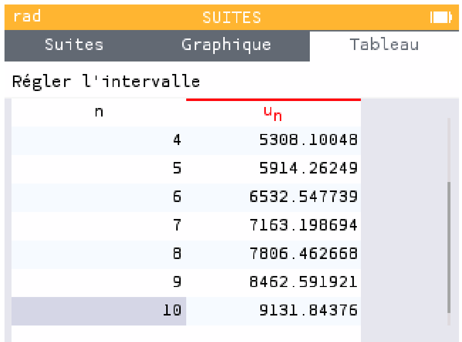
1. Montrer que $u_1 = 3560$. Que représente ce nombre ?
2. Interpréter puis calculer u_2.
3. Montrer que $u_{n+1} = 1,02u_n + 500$ pour tout entier naturel n.
4. A l'aide d'un tableur, Louise souhaite calculer l'argent dont elle disposera sur son livret d'épargne chaque année.
   Quelle formule doit-elle rentrer en C2 puis étirer afin d'y arriver ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	0				
2	$u(n)$	3000				

5. A l'aide de la calculatrice, déterminer le montant dont disposera Louise le 1er janvier 2030.

1. Augmenter une valeur de 2%, c'est la multiplier par $1+\frac{2}{100} = 1,02$.
   $u_1 = u_0 \times 1,02 + 500 = 3000 \times 1,02 + 500 = 1560$
   La somme totale sur le livret d'épargne au 1er janvier 2021 sera de 3560€.
2. $u_2 = u_1 \times 1,02 + 500 = 3560 \times 1,02 + 500 = 4131,2$
   La somme totale sur le livret d'épargne au 1er janvier 2022 sera de $4131,2$€.
3. Chaque année, la somme sur le livret u_n augmente de 2%, on la multiplie donc par $1,02$. Il faut ensuite rajouter les 500€ versés par Louise et on obtient alors la somme sur le livret l'année suivante, c'est-à-dire u_{n+1}.
   On a donc bien $u_{n+1} = 1,02u_n + 500$.
4. =B2*1,02+500
5. $2030 = 2020 + 10$, on cherche donc la valeur de u_{10}.





Louise disposera d'environ 9132€ sur son livret le 1er janvier 2030.