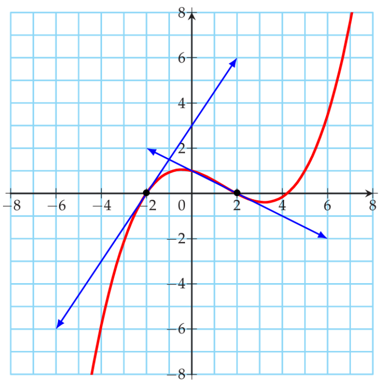
CORRECTION EXERCICES CHAPITRE 8 1STMG

1) Nombre dérivé et tangente

Exercice 1

La courbe ci-dessous représente une fonction f. En utilisant le quadrillage, donner les nombre dérivés $f'(-2)$ et $f'(2)$.

$f'(-2) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(2) = -\dfrac{1}{2}$



Exercice 2

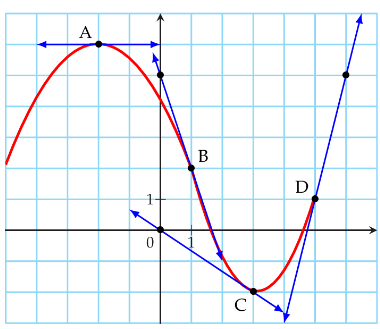
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, donner la pente de la tangente aux points A, B, C et D.
   A : 0 (tangente horizontale)
   B : -3
   C : $-\frac{2}{3}$
   D : 4
2. En déduire une équation de chacune des tangentes.
   $f(-2) = 6$ et $f'(-2) = 0$ donc :
   $T_A : y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$
   $T_A : y = 0(x + 2) + 6$
   $T_A : y = 6$

   $f(1) = 2$ et $f'(1) = -3$ donc :
   $T_B : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$
   $T_B : y = -3(x - 1) + 2$
   $T_B : y = -3x + 5$

   $f(3) = -2$ et $f'(3) = -\frac{2}{3}$ donc :
   $T_C : y = f'(3)(x - 3) + f(3)$
   $T_C : y = -\frac{2}{3}(x - 3) - 2$
   $T_C : y = -\frac{2}{3}x$

   $f(5) = 1$ et $f'(5) = 4$ donc :
   $T_D : y = f'(5)(x - 5) + f(5)$
   $T_D : y = 4(x - 5) + 1$
   $T_D : y = 4x - 19$



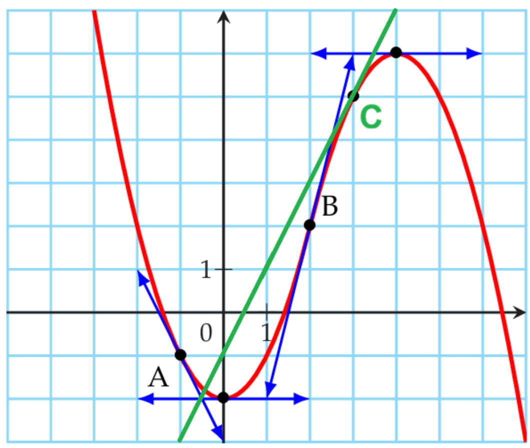
Exercice 3

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, donner les nombres $f'(0)$ et $f'(4)$.
   $f'(0) = 0$ (tangente horizontale)
   $f'(4) = 0$ (tangente horizontale)
2. (a) Par lecture graphique, déterminer les nombres $f'(-1)$ et $f'(2)$.
   $f'(-1) = -2$ et $f'(2) = 4$

   (b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A et celle au point B.
   $f(-1) = -1$ et $f'(-1) = -2$ donc :
   $T_A : y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$
   $T_A : y = -2(x + 1) - 1$
   $T_A : y = -2x - 3$

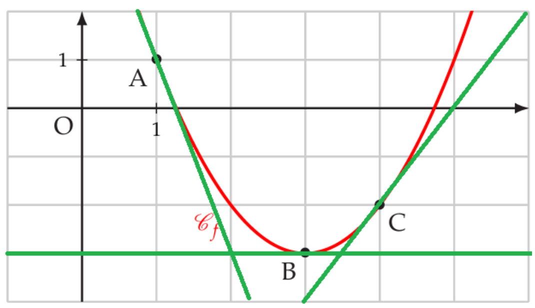
   $f(2) = 2$ et $f'(2) = 4$ donc :
   $T_B : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$
   $T_B : y = 4(x - 2) + 2$
   $T_B : y = 4x - 6$
3. On sait que $f'(3) = 2$.
   Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
   Il faut tracer une tangente qui passe par le point C avec une pente de 2.



Exercice 4

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On sait que $f'(1) = -4$, $f'(3) = 0$ et $f'(4) = 2$.
Construire les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ aux points A, B et C et donner les équations réduites de chacune d'elles.

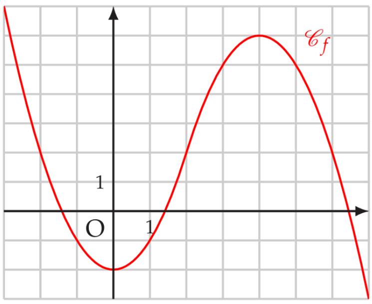
$T_A : y = -4x + 5$
$T_B : y = -3$
$T_C : y = 2x - 10$



2) Signe de f' et variations de f

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $[-3;7]$ dont la courbe est tracée ci-dessous.



1. Compléter le tableau de variation de f sur $[-3;7]$.

x	-3		0		4		7
Variations de f	7	↘	-2	↗	6	↘	-3

2. En déduire le signe de f' sur $[-3;7]$.

x	-3		0		4		7
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

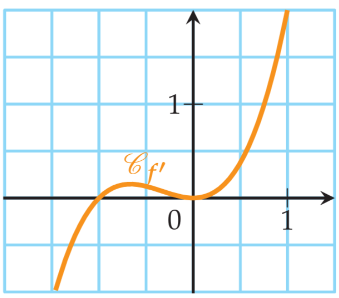
Exercice 6

On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$ et $f(3) = 2$.
Dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	1	↘	-1	↗	2	↘	

Exercice 7

Soit f une fonction dérivable sur $[-2;1]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la dérivée.

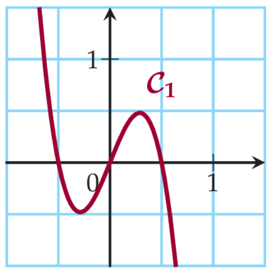


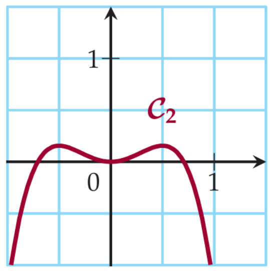
Dresser le tableau de variation de la fonction f.
(Attention au piège !)
On a ici la courbe de la fonction dérivée f', et pas celle de f. On va donc observer le signe de f' sur le graphique pour en déduire les variations de f.

x	-2		-1		0		1
Signe de f'		$-$	0	$+$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗		↗	

Exercice 8

Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f'.

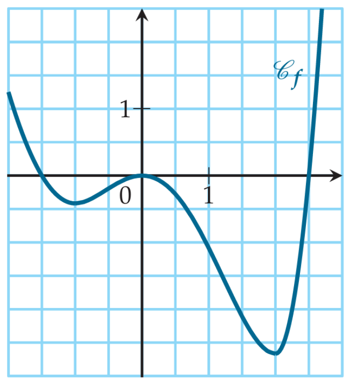




Quelle est la courbe de f et quelle est la courbe de f' ?
On observe que le signe de la fonction de gauche permet d'en déduire les variations de la fonction de droite. Par conséquent, C_1 est la courbe de f' et C_2 est la courbe de f.

Exercice 9

Soit f une fonction dérivable sur $[-2;3]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



1. Résoudre graphiquement les inéquations :
   (a) $f(x) \geqslant 0$
   $[-2;-1,5] \cup [2,5;3]$
   (b) $f(x) \leqslant 0$
   $[-1,5;2,5]$
   (c) $f'(x) \geqslant 0$
   $[-1;0] \cup [2;3]$
   (d) $f'(x) \leqslant 0$
   $[-2;-1] \cup [0;2]$
2. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 0$
   $-1,5$, 0 et $2,5$
   (b) $f'(x) = 0$
   -1, 0 et 2

3) Calcul de fonctions dérivées

Exercice 10

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 + 4$
   $f'(x) = 2x$
2. $g(x) = x^3 + x$
   $g'(x) = 3x^2 + 1$
3. $h(x) = 4x^2 - 6x$
   $h'(x) = 8x - 6$
4. $i(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 5$
   $i'(x) = 6x^2 - 10x + 7$
5. $j(x) = 2x^2 - 4x + 9$
   $j'(x) = 4x - 4$
6. $k(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 9$
   $k'(x) = -6x^2 + 12x - 3$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 11$.
Calculer $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
On calcule d'abord $f'(x) = 4x - 3$.
$f'(-1) = 4 \times (-1) - 3 = -4 - 3 = -7$
$f'(0) = 4 \times 0 - 3 = 0 - 3 = -3$
$f'(2) = 4 \times 2 - 3 = 8 - 3 = 5$

4) Problèmes

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 10$.

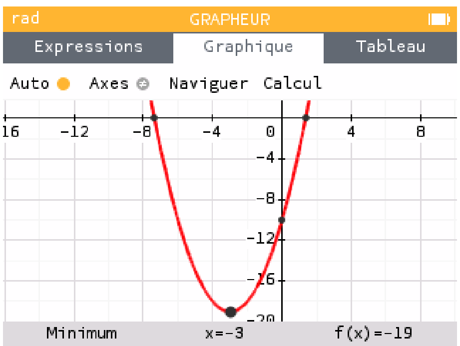
1. Calculer $f'(x)$.
   $f'(x) = 2x + 6$
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
   f' est une fonction affine.
   $m = 2 > 0$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$.
   $2x + 6 = 0$
   $2x = -6$
   $x = \frac{-6}{2}$
   $x = -3$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   A l'aide du signe de f', on peut en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-19	$\nearrow$	

4. Quel est le minimum de la fonction f ?
   En quelle valeur de x est-il atteint ?
   $f(-3) = (-3)^2 + 6 \times (-3) - 10 = 9 - 18 - 10 = -19$
   Le minimum de la fonction f est -19 et il est atteint en $x = -3$.
   Cela se confirme quand on trace la graphique à l'aide de la calculatrice.



Exercice 13 (à savoir refaire !)

Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.
On désigne par $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire (en euros) réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes.
La fonction B est définie sur l'intervalle $[0;45]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

1. (a) Calculer $B'(x)$.
   $B'(x) = -3x^2 + 120x - 525$

   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0;45]$,

$$B'(x) = -3(x-5)(x-35)$$

$$\begin{aligned} -3(x-5)(x-35) &= -3(x^2 - 5x - 35x + 105) \\ &= -3(x^2 - 40x + 175) \\ &= -3x^2 + 120x - 525 \\ &= B'(x) \end{aligned}$$

2. (a) Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0;45]$.

$x - 5 = 0$ $\qquad$ $x - 35 = 0$
$x = 5$ $\qquad\qquad$ $x = 35$

x	0		5		35		45	
-3		$-$		$-$		$-$		
$1x - 5$		$-$	0	$+$		$+$		$m = 1 > 0$
$1x - 35$		$-$		$-$	0	$+$		$m = 1 > 0$
$B'(x) = -3(x-5)(x-35)$		$-$	0	$+$	0	$-$		

   (b) Dresser le tableau de variation de B sur $[0;45]$.
   A l'aide du signe de la fonction B', on peut maintenant en déduire les variations de la fonction B.

x	0		5		35		45
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\searrow$	-1250	$\nearrow$	12250	$\searrow$	6750

   $B(0) = -0^3 + 60 \times 0^2 - 525 \times 0 = 0$
   $B(5) = -5^3 + 60 \times 5^2 - 525 \times 5 = -1250$
   $B(35) = -35^3 + 60 \times 35^2 - 525 \times 35 = 12250$
   $B(45) = -45^3 + 60 \times 45^2 - 525 \times 45 = 6750$

3. Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ? Quel est le bénéfice maximal réalisé ?
   A l'aide du tableau précédent, on en déduit que le producteur réalise un bénéfice maximal lorsqu'il vend 35kg de truffes. Le bénéfice réalisé est alors de 12250€.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x - 50$$

1. Calculer $f'(x)$.
   $f'(x) = 3x^2 - 36x + 96$
2. Montrer que, pour tout $x \in [0;10]$,
   $$f'(x) = 3(x-4)(x-8)$$
   $$\begin{aligned} 3(x-4)(x-8) &= 3(x^2 - 4x - 8x + 32) \\ &= 3(x^2 - 12x + 32) \\ &= 3x^2 - 36x + 96 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$
3. Étudier le signe de $f'(x)$.

   $x - 4 = 0$ $\quad$ $x - 8 = 0$
   $x = 4$ $\quad$ $x = 8$

x	0		4		8		10	
3		$+$		$+$		$+$		
$1x - 4$		$-$	0	$+$		$+$		$m = 1 > 0$
$1x - 8$		$-$		$-$	0	$+$		$m = 1 > 0$
$B'(x) = -3(x-5)(x-35)$		$+$	0	$-$	0	$+$		

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0;10]$.
   A l'aide du signe de la fonction f', on peut maintenant en déduire les variations de la fonction f.

x	0		4		8		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-50	↗	110	↘	78	↗	110

   Après calculs, on obtient $f(0) = -50$, $f(4) = 110$, $f(8) = 78$ et $f(10) = 110$.

5. Déterminer les extremums de f sur $[0;10]$ et préciser en quelles valeurs de x ils sont atteints.
   Sur l'intervalle $[0;10]$, le maximum de la fonction f est 110, il est atteint en $x = 4$ et en $x = 10$.
   Sur l'intervalle $[0;10]$, le minimum de la fonction f est -50, il est atteint en $x = 0$.