

## 1. VARIABLE ALÉATOIRE

### Exemple 1.

On lance un dé équilibré à six faces et on regarde le résultat.

L'ensemble de toutes les issues possibles  $\Omega$  s'appelle l'univers des possibles et  $\Omega =$

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est 5 ou 6, on gagne 2€.
- Sinon, on perd 1€.

On peut définir ainsi une variable aléatoire  $X$  qui donne le gain du joueur à ce jeu.

Les valeurs possibles de  $X$  sont  $-1$  et  $2$ .

On a alors :

$$P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X = -1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

### Définition 1.

Une **variable aléatoire**  $X$  associe un nombre réel à chaque issue de l'univers.

### Exemple 2.

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- Si cette carte est un coeur, on gagne 5€.
- Si cette carte est un carreau, on gagne 2€.
- Dans les autres cas, on perd 1€.

Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le gain du joueur à ce jeu.

Calculer  $P(X = 5)$ ,  $P(X = -1)$  et  $P(X \leq 2)$ .

$P(X = 5)$  est la probabilité de gagner 5 euros.

Il y a 8 cartes coeur donc :

$$P(X = 5) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$P(X = -1)$  est la probabilité de perdre 1 euro.

Il y a 16 cartes qui ne sont ni coeur ni carreau donc :

$$P(X = -1) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$P(X \leq 2)$  est la probabilité de gagner 2 euros ou moins.

$$P(X \leq 2) = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{16}{32} + \frac{8}{32} = \frac{3}{4}$$

## 2. LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

### Définition 2.

Soit  $X$  une variable aléatoire prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

La **loi de probabilité** de  $X$  est donnée par toutes les probabilités  $P(X = x_i)$ .

On présente généralement la loi de probabilité d'une variable aléatoire dans un tableau.

### Remarque 1.

La somme de toutes les probabilités du tableau est égale à 1.

### Exemple 3.

On lance simultanément deux dés à 6 faces et on note les valeurs obtenues.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale à la plus grande des deux valeurs. Établir la loi de probabilité de  $X$ .

On résume tous les cas possibles dans un tableau à double entrée en fonction des résultats des deux dés.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Les valeurs possibles de  $X$  sont donc 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On peut résumer les résultats dans le tableau de la loi de probabilité de  $X$  :

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

## 3. ESPÉRANCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Soit une variable aléatoire  $X$  prenant les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avec des probabilités respectives  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

### Définition 3.

L'espérance de  $X$  est le nombre, noté  $E(X)$ , défini par :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n$$

### Exemple 4.

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Si on tire un coeur, on gagne 2€, si on tire un roi, on gagne 5€ et si on tire une autre carte, on perd 1€.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au gain du jeu. Calculer l'espérance de  $X$  et donner une interprétation du résultat.

Les valeurs possibles de  $X$  sont  $-1, 2, 5$  et  $7$ .

En effet, si on tire le Roi de coeur, on gagne  $5 + 2 = 7$ €.

On résume la loi de probabilité de  $X$  dans un tableau.

Valeurs de $X$	$-1$	$2$	$5$	$7$
Probabilités	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = -1 \times \frac{21}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 7 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{32} \approx 0,47$$

Si l'on joue un grand nombre de fois à ce jeu, on gagnera en moyenne 0,47€ par partie.

## 4. RÉPÉTITION D'EXPÉRIENCES IDENTIQUES ET INDÉPENDANTES

### Définition 4.

On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre.

### Règles d'utilisation d'un arbre pondéré

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud vaut 1.
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à sa réalisation.

### Exemple 5.

Léa tente l'expérience suivante avec ses vêtements.

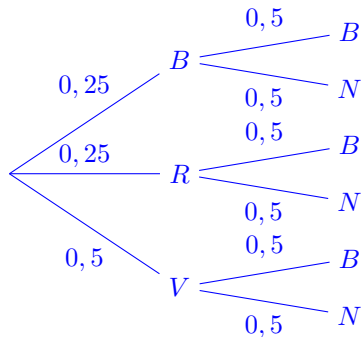
Elle dépose dans un panier 4 chemisiers indiscernables au toucher : 1 blanc, 1 rouge et 2 verts.

Dans un autre panier, elle y dépose 2 jupes également indiscernables au toucher : 1 blanche et 1 noire.

Elle tire successivement et au hasard, un chemisier du premier panier et une jupe du deuxième panier.

Ces deux épreuves, « tirer un vêtement dans chaque panier », sont dites indépendantes.

- ① Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- ② Calculer la probabilité  $p_1$  d'obtenir deux vêtements blancs.
- ③ Calculer la probabilité  $p_2$  d'obtenir une jupe noire.



$$\begin{aligned} p_1 &= P(BB) \\ &= 0,25 \times 0,5 \\ &= 0,125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= P(BN) + P(RN) + P(VN) \\ &= 0,25 \times 0,5 + 0,25 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

## 5. LOI DE BERNOULLI

### Définition 5.

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre  $p$  toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

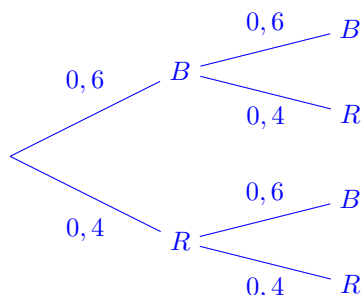
- l'une appelée « succès » notée  $S$  de probabilité  $p(S) = p$ .
- l'autre appelée « échec » notée  $\bar{S}$  de probabilité  $p(\bar{S}) = 1 - p$ .

### Exemple 6.

On considère une urne qui contient 3 boules blanches et 2 boules rouges.

On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

- ① Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
- ② Déterminer les probabilités suivantes :
  - (a) On tire deux boules blanches.
  - (b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
  - (c) On tire au moins une boule blanche.



$$\begin{aligned} p_1 &= P(BB) \\ &= 0,6 \times 0,6 \\ &= 0,36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= P(BR) + P(RB) \\ &= 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 \\ &= 0,48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= P(BB) + P(BR) + P(RB) \\ &= 0,6 \times 0,6 + 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times 0,6 \\ &= 0,84 \end{aligned}$$