Chapitre 8 : Dérivation

1. Taux de variation

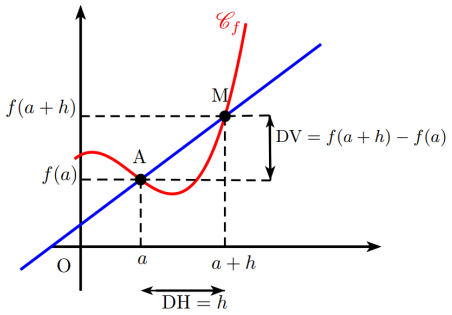
Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Soit h un réel non nul tel que $a+h \in I$.
Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le quotient $t(h)$ défini par $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Interprétation graphique

Définition 2.

On considère deux points A et M d'une courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a+h$.
La droite (AM) est appelée **sécante** à la courbe $\mathscr{C}_f$.



Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2. Nombre dérivé et tangente à une courbe

2. 1. Nombre dérivé

Définition 3.

On dit que f est **dérivable** en a lorsque le taux de variation $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand $h \to 0$.
Ce nombre, noté $f'(a)$, est appelé **nombre dérivé de f en a**.

On a ainsi :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

2. 2. Tangente à une courbe

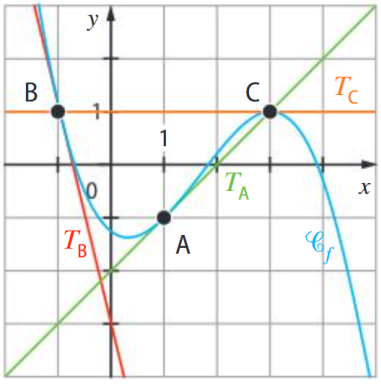
Définition 4.

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
La **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation réduite est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 1.

Déterminer graphiquement, $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(1)$, $f'(1)$, $f(3)$ et $f'(3)$.
En déduire une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x=1$.



$f(-1) = 1$, $f(1) = -1$ et $f(3) = 1$.
$f'(-1) = -4$, $f'(1) = 1$ et $f'(3) = 0$ car la tangente est horizontale.

$f(1) = -1$ et $f'(1) = 1$ donc la tangente en $x = 1$ a pour équation
$T_A : y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$T_A : y = 1(x-1) - 1$
$T_A : y = x - 1 - 1$
$T_A : y = x - 2$

$f(1)$ est l'image de 1 par la fonction f.
$f'(1)$ est le coefficient directeur (la pente) de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x=1$.

3. Fonction dérivée

3. 1. Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée

Définition 5.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée de** f. On la note f'.

Propriété 6.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

En résumé, on peut obtenir les variations de f à l'aide du signe de f' qui est souvent plus facile à déterminer.

Exemple 2.
On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On sait que $f(-2) = 4$, $f(1) = 5$ et $f(5) = -3$.
Compléter le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	4	↗	5	↘	-3	↗	

Exemple 3.
Soit f une fonction dérivable sur $[0;10]$ dont la dérivée est $f'(x) = (-2x+6)(x-5)$.
Déterminer le sens de variation de la fonction f.
On étudie le signe de la fonction dérivée f' pour en déduire les variations de la fonction f.

$-2x + 6 = 0$
$-2x = -6$
$x = 3$

$x - 5 = 0$
$x = 5$

x	0		3		5		10
$-2x + 6$		$+$	0	$-$		$-$	
$1x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$m = -2 < 0$

$m = 1 > 0$

4. Calcul d'une fonction dérivée

Soient f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction f	Dérivée f'
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Fonction	Dérivée
$f+g$	$f'+g'$
kf (avec k constante)	kf'

5. Applications aux fonctions polynômes de degré 2 et 3

Propriété 7.

- Les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$f'(x)=2ax+b$$
- Les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

Exemple 4.
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

① $f(x)=x^3+x$ — $f'(x)=3x^2+1$

② $f(x)=x^2-x+1$ — $f'(x)=2x-1+0=2x-1$

③ $f(x)=7x^3$ — $f'(x)=7\times 3x^2=21x^2$

④ $f(x)=4x^2-5x+1$ — $f'(x)=4\times 2x-5\times 1+0=8x-5$

Propriété 8.

Lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe, la fonction f admet un extremum local.

Exemple 5.
Étudier les variations de la fonction f définie sur $[-5;5]$ par $f(x)=2x^2+8x+1$.

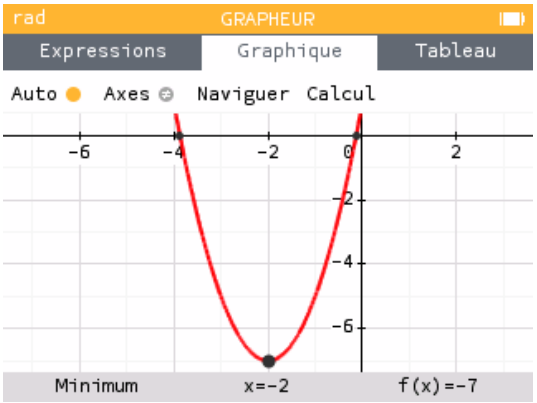
$f'(x)=2\times 2x+8\times 1+0=4x+8$

f' est une fonction affine.
$m=2>0$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}4x+8&=0\\4x&=-8\\x&=\tfrac{-8}{4}\\x&=-2\end{aligned}$$

Méthode :
① On calcule $f'(x)$.
② On étudie le signe de $f'(x)$.
③ On en déduit les variations de f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-7	↗	



$f(-2)=2\times(-2)^2+8\times(-2)+1=2\times 4-16+1=-7$

L'exercice 13 de la feuille est l'exercice bilan à savoir faire absolument.