

1. RACINES D'UN POLYNÔME

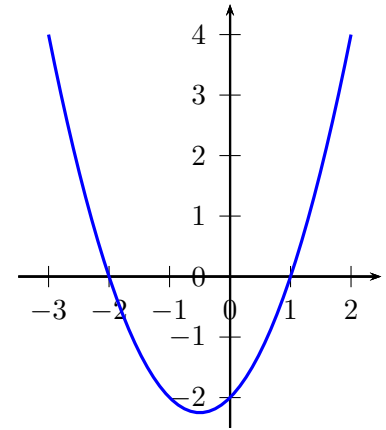
Définition 1.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} .

On appelle **racine** de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.

Autrement dit, les racines de f sont les antécédents de 0 par la fonction f .

Graphiquement, on cherche les endroits où la courbe de la fonction f coupe l'axe des abscisses. Ici, les racines de la fonction f sont -2 et 1 .



Exemple 1.

① Vérifier que le nombre 3 est une racine de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

② Déterminer les racines des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = 2(x - 2)(x + 4)$

(b) $g(x) = 9x^2 + 3x$

(c) $h(x) = x^2 - 3$

① $f(3) = 2 \times 3^2 - 5 \times 3 - 3 = 2 \times 9 - 15 - 3 = 0$

On en déduit que 3 est une racine de la fonction f .

② (a) On résout l'équation $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$2(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -4$$

En conclusion, les racines de la fonction f sont -4 et 2 .

(b) On résout l'équation $g(x) = 0$ mais il faut d'abord factoriser l'expression.

$$g(x) = 0$$

$$9x^2 + 3x = 0$$

$$x(9x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } 9x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } 9x = -3$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

En conclusion, les racines de la fonction g sont $-\frac{1}{3}$ et 0 .

(c) On résout l'équation $h(x) = 0$.

$$h(x) = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

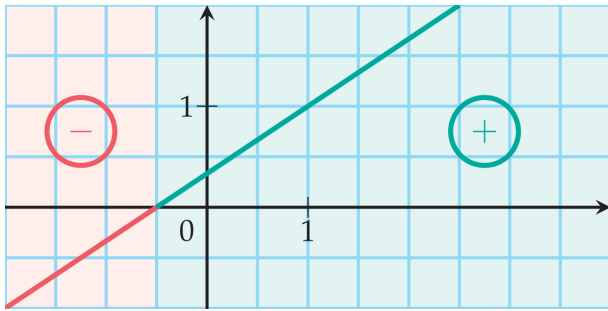
$$x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

En conclusion, les racines de la fonction h sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

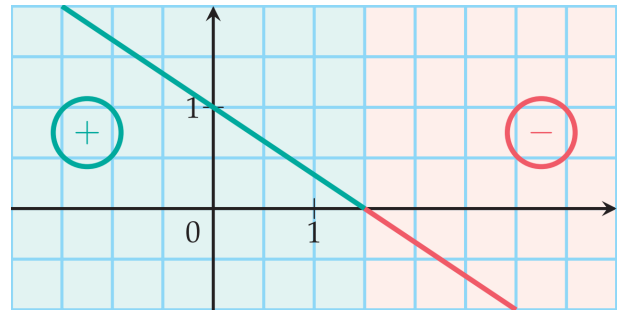
2. ÉTUDE DU SIGNE D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 2

2.1. RAPPELS SUR LES FONCTIONS AFFINES

Cas où $m > 0$



Cas où $m < 0$



Propriété 1.

Pour déterminer le signe d'une fonction affine f , il faut :

- ① Trouver où la fonction s'annule en résolvant l'équation $f(x) = 0$.
- ② Déterminer les variations de la fonction à l'aide du coefficient directeur.

Exemple 2.

- ① Déterminer le tableau de signes de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x + 8$.

$$4x + 8 = 0$$

$$4x = -8$$

$$x = \frac{-8}{4}$$

$$x = -2$$

$m = 4 > 0$ donc la fonction f est croissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	$+$

- ② Déterminer le tableau de signes de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -7x + 5$.

$$-7x + 5 = 0$$

$$-7x = -5$$

$$x = \frac{-5}{-7}$$

$$x = \frac{5}{7}$$

$m = -7 < 0$ donc la fonction g est décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$\frac{5}{7}$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	$-$

2.2. APPLICATION AUX INÉQUATIONS PRODUIT

Exemple 3. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $(4x + 8)(-7x + 5) > 0$.

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $(4x + 8) \times (-7x + 5)$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{5}{7}$	$+\infty$
Signe de $4x + 8$		$-$	$+$	$+$
Signe de $-7x + 5$		$+$	$+$	$-$
Signe de $(4x + 8)(-7x + 5)$		$-$	$+$	$-$

Sur la dernière ligne du tableau, on constate que $(4x + 8)(-7x + 5) > 0$ lorsque $x \in]-2; \frac{5}{7}[$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$\mathcal{S} =]-2; \frac{5}{7}[$$

3. FORME FACTORISÉE D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 2

Propriété 2.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, on parle alors de sa **forme factorisée** et les nombres x_1 et x_2 sont les racines du polynôme.

Exemple 4.

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 6x - 8$.

- ① Vérifier que 1 et -4 sont les racines du polynôme.
- ② En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

① $f(1) = 2 \times 1^2 + 6 \times 1 - 8 = 2 + 6 - 8 = 0$
 $f(-4) = 2 \times (-4)^2 + 6 \times (-4) - 8 = 2 \times 16 - 24 - 8 = 0$
On en déduit que 1 et -4 sont les racines du polynôme.

- ② Dans notre cas, $a = 2$, $x_1 = 1$ et $x_2 = -4$ donc la forme factorisée de $f(x)$ est :

$$f(x) = 2(x - 1)(x - (-4)) = 2(x - 1)(x + 4)$$

Exemple 5.

On considère la fonction g définie par $g(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

- ① Montrer que, pour tout réel x , $g(x) = -2(x + 3)(x - 1)$.
- ② Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

- ① On développe l'expression factorisée pour retomber sur $g(x)$.

$$\begin{aligned} -2(x + 3)(x - 1) &= -2(x^2 - x + 3x - 3) \\ &= -2(x^2 + 2x - 3) \\ &= -2x^2 - 4x + 6 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

- ② On va ici utiliser l'expression factorisée qui nous permet de résoudre une équation produit nul.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ -2(x + 3)(x - 1) &= 0 \\ x + 3 &= 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ x &= -3 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont -3 et 1 .

Propriété 3.

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

La droite d'équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f .

Exemple 6.

On considère la fonction h définie par $h(x) = 2(x - 2)(x + 4)$.

- ① Déterminer l'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
- ② Déterminer l'axe de symétrie de la parabole.
- ③ Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole.

- ① Pour déterminer l'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses, il faut résoudre l'équation $h(x) = 0$.

$$h(x) = 0$$

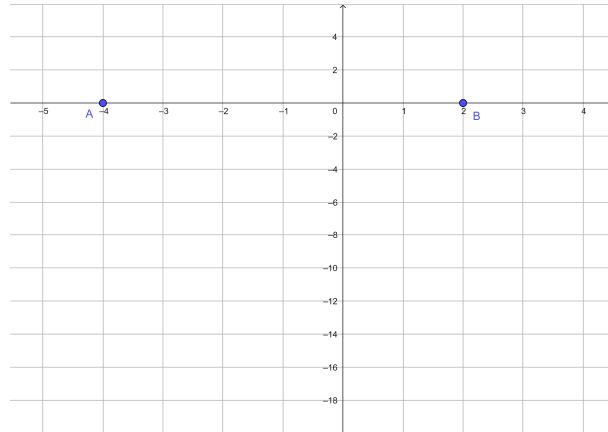
$$2(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x + 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -4$$

Ainsi, la courbe de f traverse l'axe des abscisses en $x = -4$ et en $x = 2$.

On peut marquer ces deux points d'intersection A et B dans le repère.

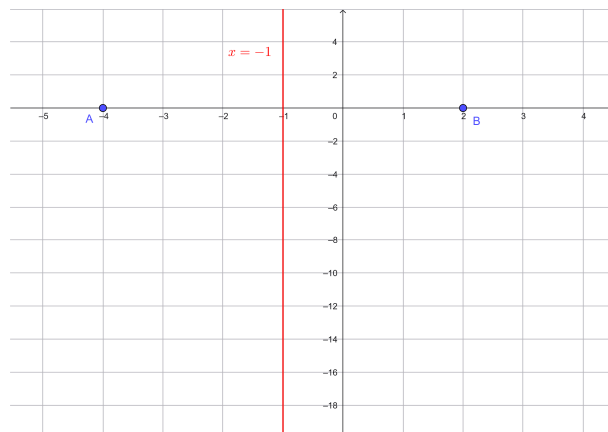


- ② Ici, les deux racines de f sont $x_1 = -4$ et $x_2 = 2$.

$$\text{On calcule } x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1.$$

La droite d'équation $x = -1$ est l'axe de symétrie de la parabole représentant la fonction f .

On peut tracer cette droite dans le repère.



- ③ Le sommet S de la parabole se trouve sur l'axe de symétrie, il a donc pour abscisse $x = -1$ et pour ordonnée :

$$h(-1) = 2(-1 - 2)(-1 + 4) = 2 \times (-3) \times 3 = -18$$

Finalement, le sommet S de la parabole est le point de coordonnées $S(-1; -18)$.

On peut placer S dans le repère et terminer de tracer la parabole.

