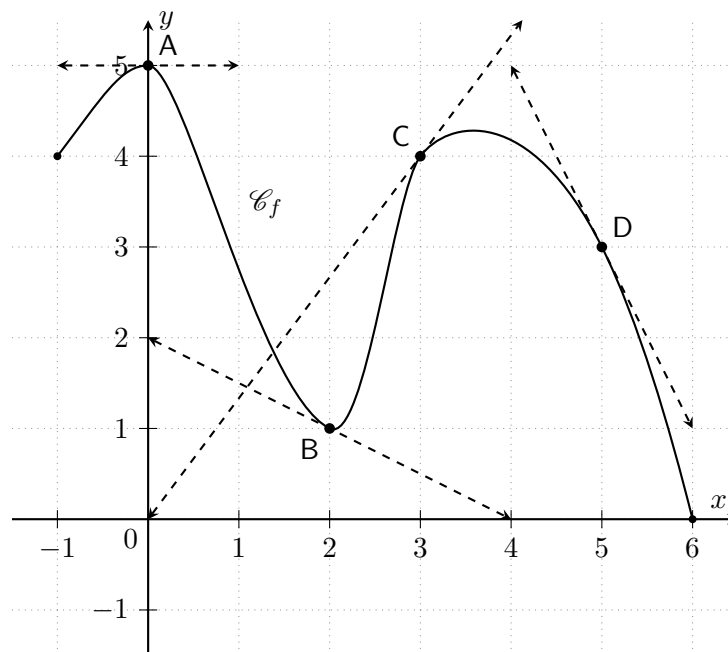


CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N°4 (55MIN)

- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Tous les exercices sont à faire directement sur le sujet.
- Le soin, le détail des calculs et la rédaction seront pris en compte dans la notation.

Exercice 1 (6 points)

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f .
On a aussi tracé les droites tangentes à la courbe aux points A, B, C et D.



1. A l'aide du graphique, donner les valeurs de $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(5)$.
 $f(0) = 5$ $f(2) = 1$ $f(3) = 4$ $f(5) = 3$
2. A l'aide du graphique, déterminer les valeurs de $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(3)$ et $f'(5)$.
 $f'(0) = 0$ car la tangente en A est horizontale.
 $f'(2) = -\frac{1}{2}$ $f'(3) = \frac{4}{3}$ $f'(5) = -2$
3. On rappelle l'expression de l'équation de la tangente en $x = a$ à la courbe représentative d'une fonction f :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Utiliser cette formule pour déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en $x = 5$.

On souhaite déterminer une équation de la tangente en $x = 5$ donc on remplace tous les a par 5 :

$$y = f'(5)(x - 5) + f(5)$$

$$y = -2(x - 5) + 3$$

$$y = -2x + 10 + 3$$

$$y = -2x + 13$$

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 3$.

1. Calculer $f'(x)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 3 \times 2x + 24 \times 1 - 0$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 24$$

2. Montrer que, pour tout $x \in [-10; 10]$, $f'(x) = -3(x - 4)(x + 2)$.

$$-3(x - 4)(x + 2) = -3(x^2 - 4x + 2x - 8)$$

$$= -3(x^2 - 2x - 8)$$

$$= -3x^2 + 6x + 24$$

$$= f'(x)$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-10; 10]$.

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on va utiliser la forme factorisée $f'(x) = -3(x - 4)(x + 2)$.

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

x	-10	-2	4	10	
-3	-	-	-	-	
$1x - 4$	-	-	0	+	
$1x + 2$	-	0	+	+	
$f'(x) = -3(x - 4)(x + 2)$	-	0	+	0	-

$$m = 1 > 0$$

$$m = 1 > 0$$

4. En déduire le tableau de variation de f sur $[-10; 10]$.

A l'aide du signe de la fonction f' , on peut maintenant en déduire les variations de la fonction f .

x	-10	-2	4	10	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Exercice 3 (7 points)

Un artisan fabrique et vend des objets en bois. Sa production mensuelle est limitée à un maximum de 60 objets. On admet que le bénéfice mensuel réalisé par l'artisan, en fonction du nombre x d'objets vendus, est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par :

$$B(x) = -10x^2 + 860x - 4050$$

où $B(x)$ est le bénéfice exprimé en euros.

1. Calculer B' la fonction dérivée de B sur l'intervalle $[0; 60]$.

$$B'(x) = -10 \times 2x + 860 \times 1 - 0$$

$$B'(x) = -20x + 860$$

2. Étudier le signe de $B'(x)$.

$$B'(x) = -20x + 860.$$

B' est une fonction affine.

$m = -20 < 0$ donc la fonction B' est décroissante sur $[0; 60]$.

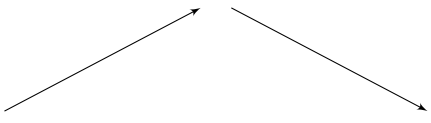
De plus,

$$-20x + 860 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -20x = -860 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-860}{-20} \quad \Leftrightarrow \quad x = 43$$

x	0	43	60
$B'(x)$	+	0	-

3. En déduire le tableau de variation de B .

A l'aide du signe de la fonction B' , on peut maintenant en déduire les variations de la fonction B .

x	0	43	60
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$			

4. Déterminer le nombre d'objets que cet artisan doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal ainsi que la valeur de ce bénéfice.

On constate que l'artisan réalise un bénéfice maximal lorsqu'il vend 43 objets en bois.

De plus, $B(43) = -10 \times 43^2 + 860 \times 43 - 4050 = 14440$.

Le bénéfice réalisé est alors de 14440€.